

nr 73

skrypty

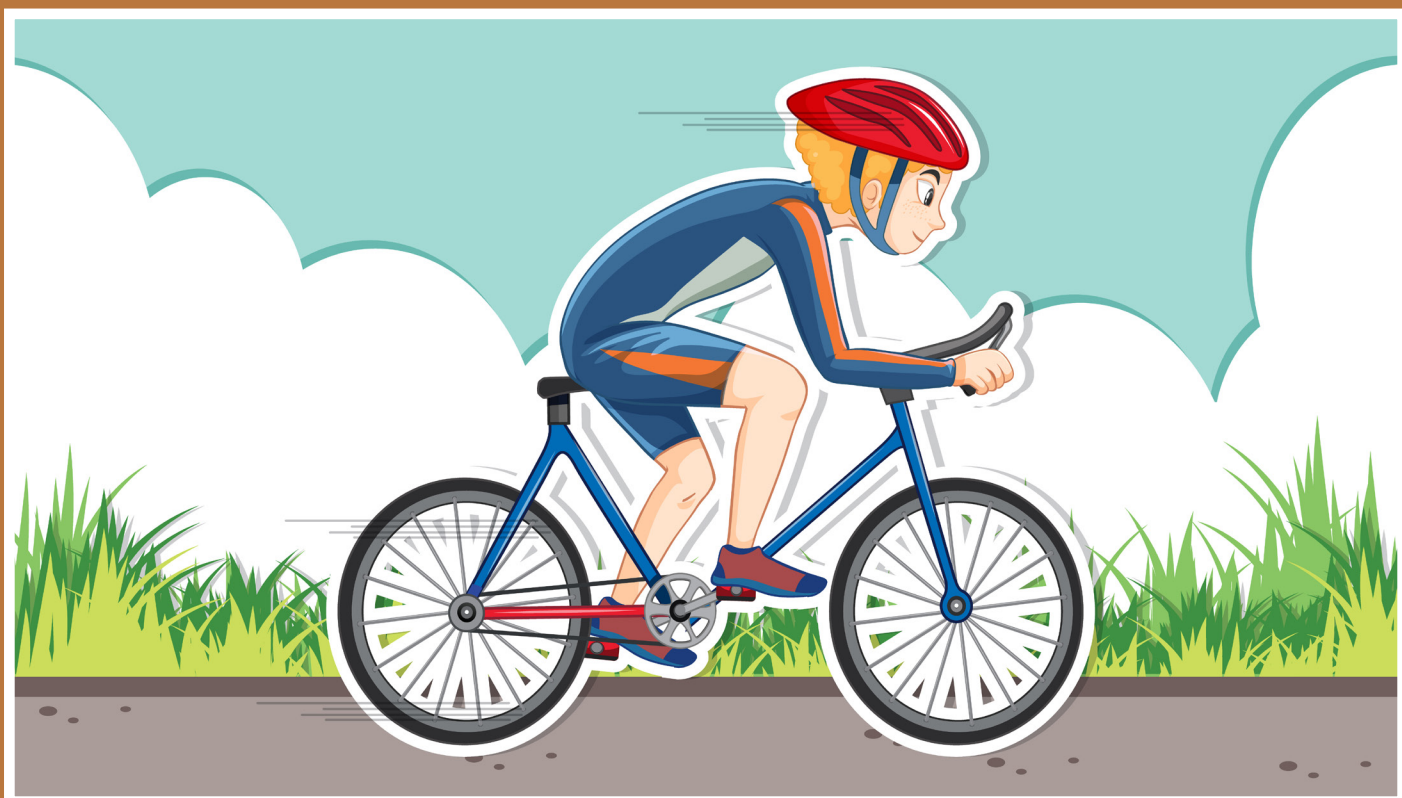
belfra



Dolnośląski
Ośrodek
Doskonalenia
Nauczycieli
we Wrocławiu

Henryk Spustek

Damian, jego rower i zaskakujące wyniki w zadaniach z fizyki



Problemy i haczyki w zadaniach z fizyki - metodyka rozwiązywania zadań

Kinematyka - prędkość średnia

Rozumienie sensu matematycznych równań nie oznacza rozumienia fizyki.
Richard Feynman

1. Zadanie z niespodzianką - wprowadzenie

Fascynujący, złożony świat fizyki wymaga ścisłego opisu analitycznego. Możliwości takie stwarza aparat matematyczny, więc nic dziwnego, że od samego początku budowano opisowe i wyjaśniające modele matematyczne. Matematyka dostarcza niezwykłego języka opisu, co sprawia, że zjawiska na pozór skomplikowane w swojej istocie stają się zrozumiałe. W zasadzie jedynym warunkiem udanej budowy modeli matematycznych jest znajomość aparatu matematycznego i umiejętność jego zastosowania. Niechęć wielu ludzi do matematyki i jej metod ma swoje podłoże we wczesnych latach szkolnych i wiąże się z tym, że poznawane kolejno zagadnienia matematyczne zdawały się być zupełnie abstrakcyjne, przeważnie nikomu do niczego niepotrzebne. Takie przekonanie było z kolei powodem braku ćwiczeń, a to prowadziło już w prostej linii do kłopotów poznawczych. Tymczasem matematyka pozostaje w związku z naukami przyrodniczymi. Chociaż nie jest z nimi spokrewniona, to występuje niezwykła harmonia między przyrodą a matematyką¹.

Problem zasugerowany w tytule niniejszego artykułu dotyczy zagadnienia sensu i sposobu podejścia do rozwiązywania problemów fizycznych, sprowadzanych często do poziomu problemu zadania stricte matematycznego. Tymczasem ten sam, wydawać by się mogło, problem fizyczny nieco inaczej sformułowany, wpleciony w rzeczywistą sytuację, staje się znacznie ciekawszy, zwłaszcza z punktu widzenia ucznia. Efekt ten zawierają zadania z tzw. *niespodzianką*. Niespodzianka ta może przybierać różne formy, ważne jest jednak, by finalnie standardowe zadanie stało się ciekawe, pobudzało ucznia do samokształcenia, sprawiało, że problem poruszony w zadaniu zmienił swoją formę z czysto abstrakcyjnej na aplikacyjną. *Zadania z niespodzianką* to zadania, które na pierwszy rzut oka wydają się być typowe i nietrudne do rozwiązania. Uczeń ma wiedzę pozwalającą na ich rozwiązanie w tym sensie, że znana jest mu metoda lub metody prowadzące do rozwiązania. Trudność pojawia się dopiero w trakcie procesu rozwiązywania zadania przy zastosowaniu standardowej metody postępowania. Zadania z niespodzianką są bardzo zbliżone do zadań o charakterze subiektywnie twórczym, gdzie charakter twórczy zadania zależy od podmiotu, czyli ucznia i charakter ten objawia się w zależności od jego przygotowania merytorycznego².

Zadanie z niespodzianką dobrze jest oprzeć na pewnej fabule, sprawiając, że stanie się ono bliższe rzeczywistości. Pozwoli to dodatkowo zachęcić ucznia do jego rozwiązania. Zadanie zdaje się być nietrudne, a dodatkowo ma swoje bezpośrednie odwołanie do otaczającego świata.

Skoro zatem wiemy już, na czym polega idea *zadania z niespodzianką*, spróbujmy skonstruować takie zadanie. Zadanie będzie z zakresu mechaniki, a ściślej kinematyki punktu materialnego, poruszającego się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Trudno jest wybrać prostszy rodzaj ruchu występującego w kinematyce punktu materialnego.

Zadanie z niespodzianką, pokazane w niniejszym artykule, dedykowane jest uczniom klasy pierwszej szkoły ponadpodstawowej, realizującym materiał w zakresie rozszerzonym. Zadanie to może również stanowić ciekawy materiał do przerobienia w ramach funkcjonującego w szkole koła zainteresowań, w zależności od indywidualnego poziomu wiedzy uczniów. Tabela 1. pokazuje cele, sposób ich osiągnięcia oraz prognozowane efekty, będące wynikiem przeprowadzenia zajęć z wykorzystaniem przedstawionego w niniejszym artykule zadania z niespodzianką.

1 H. Spustek, Fizyka - zadania i problemy. Cz.I Mechanika, Wyd. WSOWL, Wrocław 2012, s. 5.

2 K. Broctawik, A. Góralski, E. Grabowska, E. Nęcka, J. Oderfeld, Ł. Pruski, S. Sz waj, Zadanie metoda rozwiązanie, WNT, Warszawa 1984, s. 21 - 23.

Tabela 1. Aspekt metodyczny zadania z niespodzianką

| Cele ogólne ³ | Cele szczegółowe | Rola nauczyciela | Sposoby realizacji celu | Prognozowane efekty |
|--|---|---|--|--|
| Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych ⁴ . | Uczeń odczuwa potrzebę poszerzenia wiedzy | Dobór treści nauczania do możliwości uczniów | Karta pracy - diagnoza wstępna | Uczeń dostrzeże stopień skomplikowania rozważanego problemu |
| | Uczeń rozumie korelację fizyki z matematyką, potrafi zbudować model matematyczny opisywanego zjawiska | Rozwijanie umiejętności matematycznego opisu zjawisk fizycznych | Burza mózgów / Metoda delficka | Uczeń potrafi ująć problem fizyczny w postaci modelu matematycznego i dostrzec jego ograniczenia |
| Zdobywanie umiejętności formułowania samodzielnych i przemyślanych sądów, uzasadniania własnych i cudzych sądów w procesie dialogu we wspólnocie dociekającej ⁵ . | Uczeń rozumie ścisłą korelację fizyki z rzeczywistością | Wzbogacenie treści zadania o elementy otoczenia rzeczywistego | Stymulowanie przez nauczyciela formy dyskusji | Uczeń uzyskuje odpowiedzi na stawiane pytania problemowe |
| | Uczeń dąży do rozwoju własnych zainteresowań | Zachęta do empirycznego sprawdzenia uzyskanych wyników rachunkowych | Wykonanie eksperymentu laboratoryjnego (np. forma pokazu przy wykorzystaniu roweru treningowego) | Uczeń rozbudza swoją ciekawość poznawczą i chętnie przeprowadza dalsze eksperymenty |
| | Uczeń rozumie potrzebę współpracy w grupie | Wskazanie na istotę współpracy | Stawianie pytań problemowych i hipotez | Uczeń doskonali umiejętność pracy twórczej w grupie |

Źródło: opracowanie własne.

2. Przykład zadania z niespodzianką - kinematyka

Przystępujemy do sformułowania naszego zadania z niespodzianką. Sam tytuł powinien już brzmieć zachęcająco, zatem proponuję: **Damian, jego rower i zaskakujące wyniki w zadaniach z fizyki.**

Nareszcie przyszła długo oczekiwana wiosna. Damian wyciągnął swój rower z ciemnych zakamarków piwnicy i postanowił popedałować w myśl piosenki Lecha Janerki „Rower”. Wsiadł zatem na rower, podśpiewując:

*(...) Może być tak, Damian wpadł popedałować
Flaga na masz
Rower jest nasz
A rower jest wielce okej
Rower to jest świat (...)*

Oprócz zwykłej chęci przejażdżki, istniała konieczność przetestowania prędkościomierza, nabytego przez Damiana jeszcze przed zimą. Do zakupu prędkościomierza przymierzał się dość długo, bo na rynku wybór był niemały. Wybór padł na model prędkościomierza bezprzewodowego, z dużym podświetlanym ekranem, który oprócz bieżącego pomiaru prędkości, liczby przejechanych kilometrów, czy też liczby spalonych kalorii, potrafi wyliczyć prędkość średnią z całego przejechanego dystansu. Tabela 2. podaje wybrane funkcje zakupionego licznika rowerowego.

³ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz. U. 2018.467 ze zm.)

⁴ Tamże, Fizyka zakres rozszerzony, Cele kształcenia – wymagania ogólne, cel V.

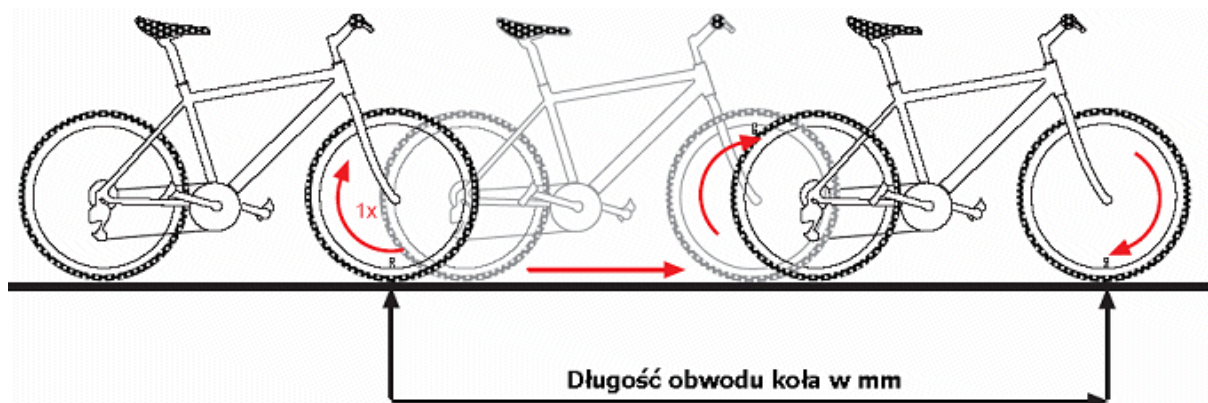
⁵ Tamże, Cele kształcenia ogólnego w liceum ogólnokształcącym i technikum, cel 4).

Tabela 2. Wybrane funkcje licznika rowerowego zakupionego przez Damiana

| Lp. | Oznaczenie / symbol | Opis funkcji |
|-----|---------------------|---|
| 1 | V | Prędkość aktualna - podaje aktualną prędkość chwilową w km/h (dokładność 0,1 km/h) |
| 2 | AVS | Prędkość średnia - wartość średniej prędkości z określonego przedziału czasu (dokładność 0,1 km/h) |
| 3 | MAX | Uzyskana przez rowerzystę prędkość maksymalna, odnosi się zazwyczaj do całej wycieczki (dokładność 0,1 km/h) |
| 4 | DST | Dystans wycieczki - odległość przejechana przez rowerzystę w km (dokładność 0,1 km) |
| 5 | STP | Czas aktywnej jazdy (dokładność 1 s) |
| 6 | +/- | Wskaźnik różnicy pomiędzy prędkością chwilową a prędkością średnią (plus oznacza prędkość chwilową wyższą od prędkości średniej a minus niższą) |

Źródło: <http://wrower.pl/sprzet/liczniki-rowerowe,5478.html>

Prędkościomierz został zainstalowany, zatem nastąpił czas jego przetestowania. Zgodnie z zamieszczoną instrukcją obsługi, licznik został skalibrowany. Damian wprowadził obwód opony. W tym celu posłużył się zamieszczoną do instrukcji tabelą rozmiarów opon i długości obwodu koła. Jednocześnie sprawdził wartość długości obwodu koła, odczytaną w tabeli, z wartością zmierzoną przez siebie (rysunek 1). Jednym słowem Damian zadbał o sprawdzenie wiarygodności podawanych przez licznik parametrów ruchu.



Rys.1. Pomiar długości obwodu koła

Źródło: <http://wrower.pl/sprzet/liczniki-rowerowe,5478.html> [data dostępu: 03.04.2024]

Damian pomyślał sobie, że najlepszym testem na sprawdzenie działania prędkościomierza i własnej kondycji po okresie zimowym będzie przejażdżka do parku odległego o 5 kilometrów i powrót do domu. Pogoda była piękna, a budząca się do życia przyroda zachęcała do leniwej przejażdżki. Nasz kolarz postanowił zatem jechać bardzo wolno i podziwiać głównie przyrodę. Droga do parku została pokonana z aktualną prędkością chwilową: 7,2 km/h (2 m/s), wskazywaną przez zainstalowany licznik. Prędkość tę potwierdziły wskazania licznika, pokazujące wielkość prędkości chwilowej V oraz tolerancji +/- w granicach 0. Stąd też Damian miał prawo przypuszczać, że prędkość, z jaką pokonał pierwszy odcinek wycieczki z domu do parku wynosiła dokładnie tyle, ile wskazywał licznik, czyli 2 m/s. Damian sprawdził też wartość prędkości V, posługując się znanym wzorem określającym prędkość w ruchu jednostajnym prostoliniowym:

$$V_{\text{sr}} = \frac{\text{całkowita pokonana droga}}{\text{całkowity czas ruchu}}$$

Odczytane wartości parametrów: DST = 5 km (5000 m) oraz STP = 41:36 (41 min 36 s = 2496 s) potwierdziły wskazywaną przez licznik wartość prędkości na pierwszym odcinku wycieczki, wynoszącą 2 m/s. Po skrupulatnym zapisaniu parametrów pierwszej części wycieczki Damian postanowił wyruszyć w drogę powrotną. Z uwagi na to, że trasa została już szczegółowo obejrzana na pierwszym etapie wycieczki, tym razem celem stało się sprawdzenie kondycji fizycznej po długiej zimie. Parametrem sprawdzającym kondycję fizyczną miała być (w zamyśle naszego rowerzysty) średnia prędkość z całej przejechanej trasy. Prędkość z pierwszego odcinka trasy wynosząca 2 m/s, wskazująca na „leniwą” jazdę musi zatem zostać zwiększona w drodze powrotnej. Damian postanawia, że prędkość średnia z całej wycieczki ma być dwukrotnie większa niż prędkość „leniwa”. Dalej rozumuje tak: jeśli będę wracał do domu z prędkością co najmniej 6 m/s, to powinienem uzyskać zamierzony efekt, zatem do dzieła. Po powrocie do domu Damian odczytał następujące wskazania ze swojego licznika: DST = 5 km (5000 m) oraz STP = 13:50 (13 min 50 s = 830 s), co potwierdzało, że udało się mu osiągnąć zamierzoną wartość prędkości w drodze powrotnej: 6 m/s. Niepokojące natomiast było coś innego, prędkość średnia z całej wycieczki nie okazała się dwukrotnie większa od prędkości na pierwszym odcinku drogi.

$$V_{sr} = \frac{\text{całkowita pokonana droga}}{\text{całkowity czas ruchu}} = \frac{10\,000\text{ m}}{3\,326\text{ s}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wynik ten mocno zaniepokoił Damiana, bo przecież w drodze powrotnej dał z siebie wszystko, osiągnął znaczną prędkość, bo było to przecież 21,6 km/h. Mimo tego nie udało mu się zrealizować zamierzonego celu drugiego etapu wycieczki.

Pozostaje zatem pytanie: z jaką prędkością powinien wracać Damian do domu, aby prędkość średnia z całej trasy była dwukrotnie większa od prędkości, z jaką podróżował na pierwszym odcinku z domu do parku?

Wykonujemy rysunek 2. Zawsze warto wykonać rysunek, nawet wtedy, gdy wydaje się on oczywisty. Rysunek pobudza wyobraźnię ucznia, jednocześnie pozwala skupić się na istotnych elementach analizowanego problemu.

Całkowitą drogę oznaczamy symbolem s , zaś prędkości i czas ruchu na poszczególnych odcinkach wycieczki: V_1 , t_1 i V_2 , t_2 .



Rys.2. Plan wycieczki Damiana

$$V_{sr} = \frac{\text{całkowita pokonana droga}}{\text{całkowity czas ruchu}} = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{V_1} + \frac{s}{V_2}}$$

$$V_{sr} = \frac{2s}{\frac{s}{V_1} + \frac{s}{V_2}}$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$2s = V_{sr} \left(\frac{s}{V_1} + \frac{s}{V_2} \right),$$

$$2s = V_{sr} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) s.$$

Zważywszy, że prędkość średnia miała być dwukrotnością prędkości z pierwszego odcinka wycieczki, mamy:

$$2s = 2V_1 s \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \quad /: 2s$$

$$1 = V_1 \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right).$$

Przekształcając dalej mamy:

$$1 = 1 + \frac{1}{V_2},$$

$$0 = \frac{1}{V_2}.$$

Powyższe równanie jest prawdziwe przy założeniu, że $V_2 \rightarrow +\infty$.

Mamy więc „niespodziankę”. Okazuje się, że osiągnięcie wartości prędkości średniej równej dwukrotnej wartości prędkości na pierwszym odcinku trasy jest niewykonalne. Damian musiałby wracać do domu z nieskończenie dużą prędkością, aby zrealizować cel drugiego etapu wycieczki. Wynik ten zdumiał naszego kolarza, a jednocześnie uspokoił go i utwierdził w przekonaniu, że prędkość średnia nie jest najlepszym miernikiem własnej tężyzny fizycznej.

W taki oto sposób Damian, rozpoczynając wycieczkę rowerową z piosenką „Rower”, nie przewidywał, że zakończy ją raczej piosenką zespołu Skaldowie pt. „Króliczek”.

*Nie o to chodzi, by złowić króliczka
ale by gonić go,
ale by gonić go,
ale by gonić go!*

Króliczkiem okazała się wartość prędkości, jaką trzeba by było osiągnąć w drodze powrotnej z parku do domu, aby prędkość średnia z całej wycieczki była dwukrotnością prędkości z pierwszego odcinka drogi. Niestety, należałoby dogonić... nieskończoność.

Opisane powyżej zdarzenie skłoniło Damiana do zadania sobie pytania o sens przejmowania się prędkością średnią podczas jazdy na rowerze. Cykliści często porównują się między sobą, a parametrem porównawczym jest prędkość średnia. Jednakże okazuje się, że przy poważnych treningach parametr ten niewiele nam powie, natomiast przy jeździe turystycznej może się przydać, bo czasami warto np. wiedzieć, czy przed zmierzchem uda nam się przyjechać do miejsca noclegu lub też policzyć, jak daleko uda się nam dojechać przed zachodem słońca, jeśli ktoś nie lubi jeździć po zmierzchu⁶.

Patrząc na sposób przedstawienia powyższego problemu w formie zadania z niespodzianką oraz na standardową wersję tegoż zadania oferowaną w typowym zbiorze zadań, zauważymy zasadniczą różnicę jakościową. Standardowo problem jest przedstawiany następująco:

Pojazd przebył pewną drogę s z prędkością V . Z jaką prędkością powinien się on poruszać w drodze powrotnej, aby średnia prędkość tam i z powrotem wynosiła $2V$?

Wnioski pozostawmy czytelnikom.

6 <https://roweroweporady.pl/srednia-predkosc-na-rowerze-o-czym-nam-mowi/> [data dostępu: 03.04.2024]

3. Szczegółowa analiza przedstawionego problemu

Teraz przychodzi czas na głębszą analizę naszego zadania z niespodzianką. Pierwsze pytanie nasuwa się niejako z automatu:

Dlaczego Damian przypuszczał, że wracając do domu z prędkością 6 m/s osiągnie zamierzony cel podwojenia prędkości z pierwszego odcinka trasy wynoszącej 2 m/s? Jaki błąd w rozumowaniu popełnił Damian?

Najprawdopodobniej Damian, określając prędkość powrotną, uznał, że skoro odcinki obu dróg były jednakowe (droga z domu do parku i z powrotem), to może on skorzystać z zależności matematycznej określającej wartość średniej arytmetycznej. Znając prędkość V_1 i pożądaną prędkość średnią $V_{sr} = 2V_1$, którą potraktował jako średnią arytmetyczną prędkości V_1 i V_2 , obliczył prędkość $V_2 = 4$ m/s. Rozumowanie to jednak w tym przypadku było błędne. Specjalnie podkreślamy, że *w tym przypadku*, sugerując przez to, że istnieje przypadek kiedy prędkość średnia jest równa średniej arytmetycznej prędkości z poszczególnych odcinków składowych przebytej drogi. Nasuwa się zatem kolejne pytanie: *Jak należałoby zmodyfikować treść naszego zadania, aby rozumowanie Damiana było poprawne?*

Oczywiście Damian niestusznie założył, że warunkiem wystarczającym do tego, aby można było wyliczyć prędkość średnią na podstawie średniej arytmetycznej, są równe odcinki obu dróg składających się na trasę wycieczki. Prędkość średnia mogłaby być w ten sposób obliczona tylko w takim przypadku, gdyby Damian poruszał się na obu odcinkach drogi przez taki sam przedział czasu. Trzeba przy tym zauważyć, że wówczas pokonywane odcinki drogi na obu etapach wycieczki byłyby różne, zależnie od wartości prędkości.

Mielibyśmy wówczas:

$$V_{sr} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{V_1 t + V_2 t}{t + t} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Kolejne pytanie mogłoby być następujące: *Czy problem zawarty w zadaniu (naszą niespodzianką) można przedstawić w formie graficznej? Jeśli tak, to jak to zrobić?*

Innymi słowy, poszukujemy odpowiedzi na pytanie: *Jaka jest zależność matematyczna pomiędzy prędkością średnią i prędkością powrotną na tej samej trasie?* Interesuje nas zależność funkcyjna pomiędzy tymi wielkościami.

Raz jeszcze rozpoczniemy od wzoru na prędkość średnią:

$$V_{sr} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{V_1 t + V_2 t}{t + t} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Wartość prędkości jest nam znana, zatem poszukiwana zależność funkcyjna prędkości średniej w zależności od wartości prędkości na odcinku powrotnym ma następującą postać:

$$V_{sr}(V_2) = \frac{2V_1 V_2}{V_1 + V_2}.$$

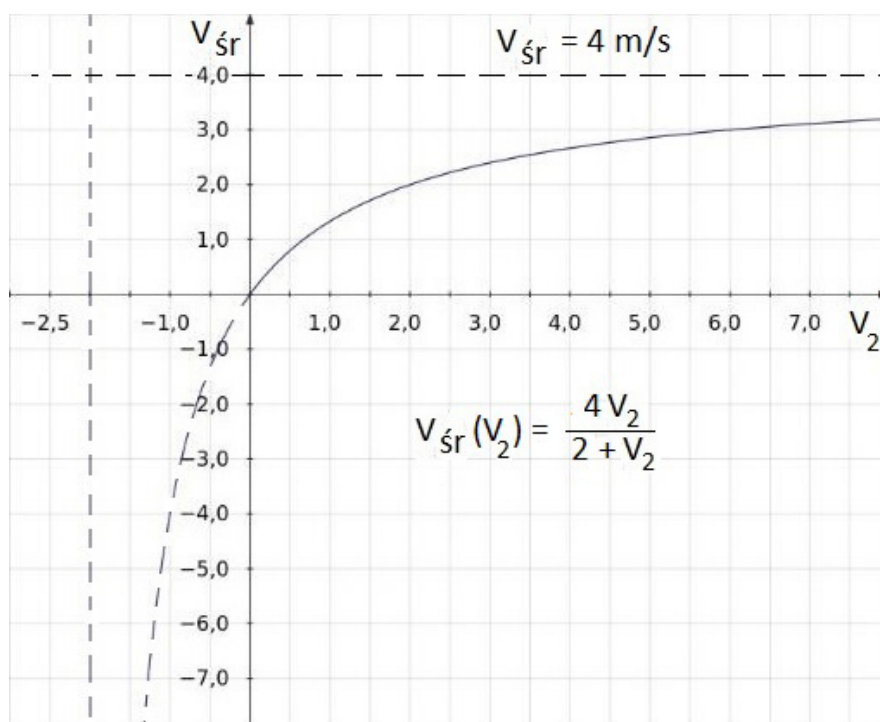
Z matematycznego punktu widzenia powyższa funkcja posiada asymptotę pionową o równaniu $V_2 = -1 = -2$ (z fizycznego punktu widzenia nie ma to znaczenia) oraz asymptotę poziomą:

$$V_{sr} = 2V_1 = 4 \text{ m/s},$$

ponieważ

$$\lim_{V_2 \rightarrow +\infty} \frac{2V_1 V_2}{V_1 + V_2} = \lim_{V_2 \rightarrow +\infty} \frac{2V_1}{\frac{V_1}{V_2} + 1} = 2V_1.$$

Na rysunku 3 przedstawiono poszukiwaną zależność funkcyjną.



Rys.3. Zależność funkcyjna prędkości średniej od prędkości w drodze powrotnej.

Źródło: opracowanie własne

Z rysunku 3. jednoznacznie wynika, że nie jest możliwe osiągnięcie prędkości średniej równej podwojonej wartości prędkości na pierwszym odcinku wycieczki Damiana z domu do parku.

4. Wnioski końcowe

Niniejszy artykuł rozpoczęliśmy od myśli Rycharda Feynmana, dotyczącej związku fizyki z matematyką. Kończąc rozważania nad *zadaniami z niespodzianką* wypada nam również nawiązać do pewnej myśli tegoż słynnego fizyka. Przy okazji prezentowania pewnej wymyślonej teorii (zresztą błędnej), w celu wyjaśnienia działania grawitacji, Richard Feynman sformułował następujący wniosek: *Zawsze należy zbadać wszystkie konsekwencje nowej teorii, aby się przekonać, czy wynikają z niej jakieś nowe przewidywania*⁷. W naszym przykładzie *zadania z niespodzianką* Damian także buduje nieprawdziwą teorię, w myśl której powinno mu się udać osiągnąć zamierzony cel drugiego etapu swojej wycieczki. Natomiast analiza tejże teorii pozwoliła na dostrzeżenie szczególnego przypadku, kiedy prędkość średnia będzie mogła być faktycznie obliczona z wykorzystaniem matematycznego wzoru na średnią arytmetyczną. Przytoczona myśl Rycharda Feynmana ma szersze znaczenie, dotyczy sposobu wyjaśniania zjawisk fizycznych i ich matematycznego modelowania wskazującego na dwa rodzaje modeli: opisowe i przyczynowe. To jednak wychodzi poza zakres tematyczny niniejszego artykułu i zasługuje na oddzielne opracowanie.

Literatura:

1. K. Broclawik, A. Góralski, E. Grabowska, E. Nęcka, J. Oderfeld, Ł. Pruski, S. Sz waj, *Zadanie metoda rozwiązanie*, WNT, Warszawa 1984
2. R. P. Feynman, *Charakter praw fizycznych*, Wyd. Prószyński i S-ka, Warszawa 2000
3. H. Spustek, *Fizyka - zadania i problemy. Cz. I Mechanika*, Wyd. WSOWL, Wrocław 2012

Źródła elektroniczne:

1. <http://wrower.pl/sprzet/liczniki-rowerowe,5478.html> [data dostępu: 03.04.2024]
2. <https://roweroweporady.pl/srednia-predkosc-na-rowerze-o-czym-nam-mowi/> [data dostępu: 03.04.2024]
3. Fizyczne forum internetowe
<https://fizyczny.net/> [data dostępu: 03.04.2024]
Jak rozwiązywać zadania z fizyki
Pawel Jan Administrator forum Ars Physica. Fizyka dla Każdego
https://fizyczny.net/add_files/Poradnik.pdf [data dostępu: 03.04.2024]